ANALISI MATEMATICA (9 CFU) - 2021/2022
1° Semestre: 4 Ottobre 2021 - 13 Gennaio 2022

Docente: Fabio Ciolli **Tutor-esercitatrice:** Arianna Vicari

Programma:
1. Numeri reali. 2. Numeri complessi. 3. Funzioni di una variabile. 4. Limiti di funzioni. 5. Limiti di successioni. 6. Funzioni continue. 7. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile. 8. Polinomi di Taylor e Mc Laurin. 9. Integrale di Riemann. 10. Serie numeriche e integrali impropri. 11. Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate ordinarie (cenni). 12. Calcolo infinitesimale per funzioni di più variabili (cenni).

Testi consigliati:
M. Bertsch, A. Dall'Aglio, L. Giacomelli: Epsilon 1. Primo corso di Analisi Matematica. McGraw-Hill Education, (2021)
M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: Analisi matematica. Con aggiornamento online, McGraw-Hill (2014)
M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 1 e 2, Zanichelli (2008, 2009)
C. Canuto, A. Tabacco: Analisi matematica 1 e 2 Teoria ed esercizi, UniText Springer (2014)

D I A R I O D E L C O R S O

05.10.21 (Presentazione del corso.) Elementi di base sugli insiemi numerici: Naturali, Interi, Razionali e Reali, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Insiemi, proprietà caratteristica che definisce un insieme, Cardinalità. Insieme potenza. Notazione Polinomiale e allineamento decimale. Definizione di numero razionale. Operazioni tra insiemi. Diagrammi di Venn. Esercizi: sulle disequazioni polinomiali.

07.10.21 Elementi di logica matematica: Predicati, Connettivi e Quantificatori. Dimostrazione per contraddizione, o *ad absurdum*. Non razionalità di $\sqrt{2}$, con dimostrazione per assurdo. Proprietà di $\mathbb{Q}$ come campo commutativo ordinato. Esercizi: sulle disequazioni con valori assoluti e funzioni razionali.

12.10.21 $\mathbb{Q}$ è un campo commutativo ordinato con le proprietà di densità e di Archimede. Le proprietà di $\mathbb{Q}$ si estendono a $\mathbb{R}$. Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: intervalli e semirette, aperti e chiusi. Topologia di $\mathbb{R}$. Palle in $\mathbb{R}^n$. Funzione modulo e disuguaglianza triangolare. La retta reale $\mathbb{R}^1$ e la retta estesa $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Esercizi: ancora sulle disequazioni con valori assoluti e funzioni razionali.

14.10.21 Insiemi limitati in $\mathbb{R}$. Massimo e minimo (max e min) di un insieme limitato in $\mathbb{R}$. *Supremum* e *infimum*, (sup and inf) di insiemi di $\mathbb{R}$. Proprietà del sup and inf. Exercises on max, min and sup, inf. Teorema (di Completezza di $\mathbb{R}$, senza dimostrazione (s.d.)). Buona definizione dei radicali ed altre funzioni, come funzioni a valori reali. Principio di Induzione. Diseguaglianza di Bernulli e altri esempi. Fattoriale e la formula del binomio di Newton. Triangolo di Tartaglia (Pascal). Esercizi: su max / min e sup / inf, anche con insiemi definiti da una successione e su unioni di insiemi; disequazioni esponenziali e proprietà dei logaritmi.

19.10.21 Prodotto cartesiano di insiemi. Piano cartesiano e spazio euclideo, n-dim. Relazioni sul prodotto cartesiano di insiemi. Relazione d'ordine (parziale) e relazione di equivalenza. Definizione di funzione come relazione su un prodotto cartesiano; caso del piano cartesiano. Dominio naturale di una funzione; immagine e grafico di una funzione. Contro-immagine. Successioni come funzioni su $\mathbb{N}$. Funzioni elementari: Polinomi, funzioni razionali, radici n-esime, funzioni goniometriche, funzione segno, parte intera, mantissa, funzioni definite per casi. Funzioni limitate. Esercizi: sulle disequazioni, dimostrazioni per induzione, limitatezza di insiemi.

21.10.21 Suriettività e iniettività di funzioni. Funzioni biunivochee funzione inversa. Grafico della inversa di una funzione reale. Restrizioni di funzioni Funzioni (strettamente) monotone: funzioni crescenti e decrescenti. Rapporto incrementale. Proposizione (con dimostrazione (c.d.)): una funzione strettamente monotona definita su un intervallo è invertibile. Esercizi: invertibilità di una famiglia di funzioni dipendenti da un parametro. Composizione di funzioni. Dominio e immagine di una funzione composta: $\mathrm{dom}\,(g \circ f) := f^{-1}(\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{dom}\, g)$, cioè la pre-immagine di f su $\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$; $\mathrm{im}\,(g \circ f) := g(\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{dom}\, g)$. Non commutatività della composizione di funzioni. Le funzioni esponenziali, logaritmiche, trigonometriche: definizione, grafico e proprietà.

26.10.21 Definizione di insieme infinito. Cardinalità di un insieme infinito: insiemi numerabili e non numerabili. Esempi: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sono numerabili. $\mathbb{Q}$ é numerabile, ad esempio usando l'argomento diagonale di Cantor. $\mathbb{R}$ é non-numerabile (s.d.). $|\mathbb{R}| = |I|$ per I ogni intervallo reale aperto, usando la funzione $x \mapsto \tan(x)$, per $|x| < \frac{\pi}{2}$. Intorni aperti e distanza euclidea in in $\mathbb{R}^n$. Intorni di $\pm\infty$ in $\mathbb{R}^*$. Punti interni, esterni e di frontiera (bordo) di un insieme in in $\mathbb{R}^n$. Punti di accumulazione di un insieme in $\mathbb{R}^n$. Insieme derivato. Punti isolati e insiemi discreti. Esempi ed esercizi: composizione di una funzione e della sua inversa; composizione di funzioni reali e grafico; insieme derivato di una unione di insiemi. Punti di accumulazione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}^*$.

28.10.21 Insiemi aperti e chiusi. Chiusura di un insieme. Insiemi densi. Teorema (Caratterizzazione degli insiemi chiusi (s.d.)): $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é chiuso $\iff \partial A \subseteq A \iff A' \subseteq A$, dove ∂A e A' sono rispettivamente la frontiera e il derivato di A. Teorema (Bolzano-Weierstass (s.d.)): Un insieme infinito e limitato in $\mathbb{R}^n$ ammette almeno un punto di accumulazione. Limiti di funzioni e successioni reali: definizione generali attraverso intorni. Limiti: casi specifici e presentazione ε, δ e L, M. Teorema (Unicità del limite (c.d.)). Esempi ed esercizi: verifica del valore del limite, attraverso la definizione.

02.11.21 Infiniti e infinitesimi; un generico infinitesimo viene detto "un o piccolo" di Landau, in simboli $o(1)$. Limite destro e limite sinistro. Limiti da sopra e da sotto. Teorema (Permanenza del segno (s.d.)) Properietà che valgono definitivamente, per $x \to x_0$. Teorema (del confronto (c.d.)). Teorema (Algebra dei limiti (c.d.)). Esercizi ed esempi: esistenza e non esistenza per limiti da destra/sinistra. Proprietà vere al limite (cioè definitivamente). Verifiche di limiti di funzioni invertibili o monotone da destra/sinistra, da sopra/sotto. Esistenza e non esistenza di limiti, a valori in $\mathbb{R}$: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, cioè $\sin(x) = x + xo(1)$, per $x \to 0$. $\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin(x)$.

04.11.21 Ancora sui limiti notevoli e approssimazioni: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, cioè $\cos(x) = 1 - x^2(\frac{1}{2} + o(1))$, per $x \to 0$. Estensione dell'algebra dei limiti con valori in $\mathbb{R}^*$. Forme indeterminate di tipo algebrico. Limiti di funzioni razionali a 0 e $\pm\infty$. Teorema (Limiti di funzioni composte (s.d.)). Sostituzione di variabile nei limiti. Esempio: $\lim_{x\to 0} |x|^\alpha \sin(\frac{1}{x}) = 0$, for $\alpha > 0$. Esempi ed esercizi sui limiti notevoli e uso delle approssimazioni con $o(1)$.

09.11.21 Teorema (Limite di funzioni monotone (s.d.)): se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funziona monotona e $x_0 \in \mathbb{R}^* \cap X'$, allora, in particolare se f è monotona crescente e x_0 è punto di accumulazione sinistro di X, vale $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{X\cap(-\infty,x_0)} f$. Applicazione: esistenza dei limiti di potenze, esponenziali e logaritmi. Forme indeterminate del tipo $f(x)^{g(x)}$. Teorema (teorema ponte o di esistenza di limite per convergenza di successioni (s.d.)). Applicazioni: non esistenza di $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ and $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin \frac{1}{x}$, per $\alpha < 0$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$ per $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$ (c.d.). $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^\alpha a^x = 0$ per $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$ (c.d.). $\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = 0$, per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $b > 0$, $b \neq 1$ (c.d.). $\lim_{x\to 0^+} |\log_b x|^\alpha x^\beta = 0$, per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ and $b > 0, b \neq 1$ (c.d.). Per $a, b > 1, \alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\beta \in \mathbb{R}^+$ e per $x \to +\infty$, gli infiniti di tipo logaritmo, potenze ed esponenziali sono ordinati (catena degli infiniti), per $x \to +\infty$: $(\log_b x)^\alpha \prec x^\beta \prec a^x \prec x^x$. Similmente per gli infinitesimi (catena degli infinitesimi). Catena degli infiniti per successioni: per costanti come sopra, $\log_b(n) \prec n^\beta \prec a^n \prec n! \prec n^n$, cioè $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, etc. (c.d.). Esempi ed esercizi sui limiti notevoli. Limiti per razionalizzazione e approssimazioni.

11.11.21 Limiti di successioni: notazione e teoremi. Confronto di infinitesimi e infiniti: definizione di confronto tramite il limite del quoziente. Infinitesimi (infiniti) equivalenti. Se $f(x)$, $g(x)$ sono infiniti (o infinitesimi) per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$ e l'ordine di f è più grande di quello di g, scriviamo $g(x) = o(f(x)) = f(x)o(1)$ (oppure, per gli infinitesimi, $f(x) = o(g(x)) = g(x)o(1)$) per qualche $o(1)$. Definizione di "O grande" di Landau. Algebra degli infinitesimi, degli infiniti e degli "o piccoli" di Landau. Teorema (Esistenza della costante di Nepero, cioè del numero di Eulero) (c.d.)): $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Teorema (s.d.): $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. Asintoti del grafico si una funzione: verticali, orizzontali e obliqui. Approssimazione di una funzione e comportamento asintotico. Esercizi sul calcolo di limiti con approssimazioni al primo ordine (cioè con i limiti notevoli) tramite $o(1)$ e $o(f)$ e sulla determinazione di asintoti obliqui, se esistono.

16.11.21 Limiti notevoli dalla definizione di e (c.d.): $(1+\frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha$ per $x \to +\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; $(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha$ per $x \to 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; $\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$; $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$; $a^x = 1 + \ln(a)x + o(x)$ per $x \to 0$ and $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$; and $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Formula di Stirling. Confronto di infiniti e infinitesimi: Ordine di infinitesimo (e infinito): definizione tramite rapporto con infinitesimo (infinito) di riferimento.

Altri limiti notevoli: $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = 1$. Funzioni continue: definizione ed esempi. L'algebra delle funzioni continui in un punto e su un intervallo aperto. Funzione continua da destra e/o da sinistra. Teorema (permanenza del segno per funzione continue (s.d.)). Teorema (composizione di funzioni continue (s.d.)). Classi di funzioni continue. Funzioni iperboliche definizione e proprietà: sinh; cosh; tanh. Notazione: $C(X) := \{\text{Insieme delle funzioni continue su } X\}$, anche indicato con $C^0(X)$. Esercizi sui limiti e ordine di infinitesimo o infinito.

18.11.21 L'ordine di infinito del logaritmo di base $a > 1$, per $x \to +\infty$, confrontato con la funzione identica, $x \mapsto x$, non è un numero reale, è positivo e più piccolo di ogni numero positivo reale. L'ordine di un infinito esponenziale di base $a > 1$, per $x \to +\infty$, confrontato con la funzione identica, $x \mapsto x$, non è un numero reale, è positivo e più grande di ogni numero positivo reale. Punti di discontinuità: tipo rimovibile, salto e essenziale. Prolungamento continuo di una funzione. Teorema (s.d.): una funzione monotona e continua su un intervallo ha al più una infinità numerabile di discontinuità di salto o rimovibili se agli estremi dell'intervallo. Teorema (degli zeri di una funzione continua (c.d.)) una funzione continua f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$, ammette almeno uno zero in (a, b); se f è strettamente monotona allora lo zero è unico. Corollario (c.d.): esistenza della soluzione dell'equazione $f(x) = g(x)$, per f e g funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato, con valori diversamente orientati agli estremi. Teorema (s.d.): se f è continua su un intervallo I (limitato o non limitato) allora $f(I)$ è un intervallo, cioè f assume tutti i valori tra $\inf_I f \geq -\infty$ and $\sup_I f \leq +\infty$. Un sottoinsieme di K di $\mathbb{R}$ si dice compatto se è chiuso e limitato. Unione finita di intervalli chiusi e limitati in $\mathbb{R}$ è compatto. Teorema (s.d.): se l'intervallo $I \subsetneq \mathbb{R}$ è chiuso e limitato (cioè compatto) e f è continua su I, allora $f(I)$ è compatto e f ammette $\max = \max f(I)$ e $\min = \min f(I)$ (globali) su I (Teorema di Weierstrass). Teorema (s.d.): se f è continua su un intervallo I, allora f è invertibile $\iff$ f è strettamente monotona. Teorema (continuità dell'inversa (s.d.)): sia $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ continua e invertibile su X e $f^{-1} : f(X) \to X$ la sua inversa. Allora f^{-1} è continua su $f(X)$ se X è un intervallo (limitato o no) oppure se X è chiuso e limitato (cioè un compatto). Numeri complessi. $\mathbb{C}$ è un campo commutativo. Presentazione Cartesiana. Interpretazione geometrica. Modulo e argomento. Complesso coniugato. Presentazione trigonometrica e polare. Esponenziale complesso. Radici complesse. Esempi di discontinuità e continuità di funzioni. Esercizi su radici e equazioni in $\mathbb{C}$.

23.11.21 Teorema fondamentale dell'Algebra (s.d.). Calcolo Differenziale di funzione reali con una variabile reale. Retta tangente (non verticale) al grafico di una funzione. Derivabilità di una funzione in un punto. Significato geometrico della derivata in un punto. Tangente verticale e derivata illimitata in un punto. Approssimazione di una funzione derivabile in un punto. Miglior approssimazione lineare. Teorema (Derivabilità e continuità (c.d.)): se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0. Derivata destra e sinistra. Esempi: funzioni con derivata in un punto non definita: punti angolosi, cuspidi e punti a tangente verticale. Funzioni continue non derivabili in un punto. Calcolo della derivata attraverso la definizione: x^n per $n \in \mathbb{N}$. Decomposizione di polinomi: esempi del caso delle radici complesse coniugate.

25.11.21 Notazione per la derivata e derivate successive. Differenziale. Teorema (Algebra delle derivate (c.d.)): combinazione lineare, prodotto e quoziente di funzioni derivabili in un punto sono funzioni derivabili. Formula di Leibniz per la derivata n-esima del prodotto di funzioni derivabili n-volte in un punto. Teorema (Derivata di funzione composta - "regola della catena" (c.d.)). Esercizi: sulle funzioni continue e funzioni derivabili dipendenti da parametro. Calcolo di limiti con approssimazione al primo ordine, cioè con i limiti notevoli.

30.11.21 Teorema (Derivata della funzione inversa (c.d.)). Derivate delle funzioni elementari: x^α, e^x, $\sinh x$, $\cosh x$, $\ln|x|$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $|x|$, a^x e $\ln_a|x|$ con $1 \neq a > 0$. Calcolo di derivate usando la definizione, le regole di calcolo e teoremi. Esempi di regolarità (continuità e derivabilità in un punto) di funzioni: $f_\alpha(x) = |x|^\alpha \sin(\frac{1}{x})$ per $x \neq 0$ e $f_\alpha(0) = 0$, per $\alpha \geq 0$. Continuità, derivabilità di classe $C^n(I)$ e classe $C^\infty(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Definizione di (punti) estremi locali (cioè relativi): max e min relativo. Estremi e punti critici. Teorema (di Fermat sugli estremi locali (c.d.)): se x_0 è un punto di estremo locale per f e f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$. Esempi e controesempi. Punti di estremo locale e globale di una funzione su un intervallo chiuso: Teorema di Fermat e tipo di punto estremo. f è pari (dispari) su un intervallo aperto I centrato in $x = 0$ e derivabile su $I \iff$ la sua derivata f' è dispari (pari) su I. Esercizi: calcolo della equazione della tangente in un punto del grafico della funzione inversa.

02.12.21 Teorema (del valor medio di Lagrange (c.d.)): f continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e differenziabile sull'intervallo aperto (a, b) ammette almeno un punto $c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Teorema (di Rolle (c.d.)). Teorema (di Cauchy (c.d.)). Corollario (del Teorema di Lagrange (s.d.)): nei punti di bordo b (a) il limite destro (sinistro) della derivata é uguale alla derivata destra (sinistra). Teorema (relazione tra monotonia e segno della f', (c.d.)): su un intervallo aperto $f' \geq 0\,(\leq 0) \iff f$ é (strettamente) crescente ((strettamente) decrescente); $f' > 0\,(< 0) \implies f$ é strettamente crescente (strettamente decrescente) e non vice-versa. Teorema (di de l'Hôpital (s.d.)); esempi e contresempi

07.12.21 Teoria di Taylor dei polinomi di approssimazione (espansione). Definizione dei polinomi di Taylor e Mac Laurin, i.e. con punto di centro uguale a 0. Teorema (di Peano (c.d.): esistenza, unicità e proprietà dei polinomi di Taylor. Esempi di polonomi di Taylor e Mac Laurin. Polinomi di Mac Laurin di funzioni pare (dispari). Formule del resto (errore o approssimazione) di Peano e Lagrange.

09.12.21 Composizione e linearità dei polinomi di Taylor. Sviluppo di f' dallo sviluppo di f, e vice versa. Calcolo dei polinomi di Mac Laurin di funzioni composte. Cambio del centro del polinomio di Taylor e riduzione a un polinomio di Mac Laurin. Esercizi: applicazione dello sviluppo di Taylor per la determinazione di infiniti/infinitesimi di una funzione e il calcolo di limiti.

14.12.21 Teorema (sui punti stazionari di funzioni e zero di derivate successive (c.d.)): se f t.c. $f^k(x_0) = 0$ per $k = 1, \ldots, n-1 \geq 1$ e $f^n(x_0) \neq 0$, allora esiste un estremo locale in x_0 se n è pari, e non ha estremo locale n dispari. Insiemi convessi Combinazione complessa. Funzioni complesse su $\mathbb{R}$: definizioni ed esempi. Teorema (s.d.): una funzione f derivabile su un intervallo aperto (a, b) è (strettamente) convessa $\iff$ f' è (strettamente) crescente iff la retta tangente per un punto $(x_0, f(x_0))$ con $x_0 \in (a, b)$ si trova (strettamente) sopra il grafico di f. Se f è 2-volte derivabile, f è convessa $\iff$ $f'' \geq 0$; se $f'' > 0$ allora è strettamente complessa. Punti di flesso Teorema (s.d.): Sia f una funzione definita su intervallo aperto (a, b), 2-volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$ con x_0 un punto di flesso per f; allora $f''(x_0) = 0$. Primitive (anti-derivate) di una funzione e integrale indefinito. Teorema (s.d.): se f è definita su un intervallo aperto e ha una discontinuità di tipo salto, allora non ammette una primitiva. Teorema (c.d.): l'insieme delle primitive è dato da una primitiva, a meno di una costante additive. Integrale indefinito. Primitive delle funzioni elementari. Linearità dell'integrale indefinito. Integrazione per parti. Esempi ed esercizi: funzioni con derivate successive nulle in un punto e approssimazione di Taylor. Andamento asintotico di una funzione per $x \to \infty$ e posizione di una sua funzione approssimante. Calcolo di integrali per parti.

16.12.21 Integrali per sostituzione: cambio di variabili nell'integrale. Sostituzioni speciali. Integrazioni di funzioni razionali: caso generale e, in particolare, caso di $\int \frac{dx}{x^2+bx+c}$, per ogni $\Delta = b^2 - 4c$. Decomposizione di funzioni razionali in somma di frazioni semplici. Metodi per determinare i coefficienti della somma di frazioni semplici. Primitive di $f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)}$ per a, b, p, $q \in \mathbb{R}$. Esercizi: integrazione per sostituzione e di funzioni razionali.

21.12.21 Teoria di integrazione di Riemann. Integrali definiti. Insieme delle partizioni di un intervallo reale $[a, b]$ chiuso e limitato, $\mathcal{P}_{[a,b]}$. Raffinamento di partizioni. Somme integrale superiore e superiore di una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato. Approssimazione dell'area del sotto-grafico di una funzione. Definizione di integrale di Riemann su $[a, b]$, e classi di funzioni integrabili secondo Riemann, $\mathcal{R}(a, b)$. L'area (algebrica) del sotto-grafico di una funzione è un integrale definito. Esempi di funzioni Riemann integrabili: la funzione costante, funzione costante su intevallo aperto. La funzione di Dirichelet non è Riemann integrable. Teorema (Criterio di integrabilità secondo Riemann (s.d.)): $f \in \mathcal{R}(a, b) \iff$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste una partizione $P_\epsilon \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ dell'intervallo $[a, b]$ t.c. $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$. La continuità uniforme su $[a, b]$. Teorema (c.d.): le funzioni continue su $[a, b]$ sono Riemann integrabili. Teorema (s.d.): le funzioni monotone su $[a, b]$ sono Riemann integrabili. Teorema (s.d.): le funzioni limitate su $[a, b]$ con un numero finito (o al più numerabile) di punti di idscontinuità di tipo salto o eliminabile (cioè non essenziali) sono Riemann integrabili. Due funzioni limitate su $[a, b]$ che coincidono salvo su un insieme finito (o al più numerabile) di punti, sono entrambe Riemann integrabili, con lo stesso integrale definito, oppure entrambe non Riemann integrabili. Teorema (s.d.): proprietà dell'integrale di Riemann (linearità; ordinamento; la parte positiva f_+, la parte negativa f_- di f e $|f|$ Riemann integrabili se $f \in \mathcal{R}(a, b)$; additività rispetto l'intervallo di integrazione. Teorema (c.d.): valor medio integrale di $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e di $f \in C([a, b])$. Funzione integrale di $f \in \mathcal{R}(a, b)$, rispetto $c \in [a, b]$, cioè $x \mapsto F(x) = \int_c^x f(s)\, ds$, per $x \in [a, b]$. Teorema (c.d.): una funzione $f \in \mathcal{R}(a, b)$ continua in $x_0 \in (a, b)$ ha funzione integrale $F(x)$ t.c. $F'(x_0) = f(x_0)$.

22.12.21 (due ore) Corollario (Teorema fondamentale del calcolo integrale (c.d.))): una funzione $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e $f \in C(a,b)$ ha funzione integrale $F \in C^1(a,b)$ e per ogni primitiva G vale $G(x) = F(x) + k$, per $k \in \mathbb{R}$ e $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$. Applicazioni dell'integrale di Riemann: calcolo di aree di sottoinsiemi del piano reale; calcolo della lunghezza di un arco di curva grafico. Integrali impropri: motivazioni e misura di sottoinsiemi del piano non limitate. 1° esempio fondamentale: $\int \frac{1}{x^\alpha}\ dx$, per $\alpha \in \mathbb{R}$, su $(0,1]$ e su $[1,+\infty)$. Definizione di integrale improprio, per funzioni non limitate (su intervallo limitato) e per intervallo non limitato, come limite agli estremi di integrazione, di un integrale di Riemann Natura di un integrale improprio: convergenza, divergenza e indeterminazione. Decomposizione di un integrale improprio rispetto il dominio di integrazione. Significato geometrico della convergenza di un integrale improprio. Teorema (Criterio del confronto per integrali impropri per funzioni positive (c.d.)). Corollario (Criterio dell'ordine di infinitesimo (o infinito) per funzioni positive). 2° esempio fondamentale: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta(x)}\ dx$, per $\beta \in \mathbb{R}$. 3° esempio fondamentale: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}\ dx$, per $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Esempi ed esercizi.

23.12.21 Integrazione impropria in valore assoluto: definizione ed esempi. Teorema (s.d.): l'integrazione impropria in valore assoluto è una condizione sufficiente, e non necessaria, per la integrabilità improprioa semplice. Serie numeriche: definizione ed esempi di serie sommabili: serie di Mengoli; serie geometrica; $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{k})$. Teorema (Condizione necessaria di semplice convergenza (c.d.)): se $\sum_k^{+\infty} a_k$ é convergente allora $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Definizione di successione di Cauchy ed equivalenza con successione convergente. Teorema (Criterio di Cauchy per serie numeriche, (s.d.)): una serie é convergente $\iff$ la successione delle sue somme parziali é di Cauchy. Esempio: la serie armonica é divergente. Serie numeriche ed integrali impropri. Teorema (Criterio integrale per serie a termini positivi (s.d.)). Esempio: la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente se e solo se $\alpha > 1$ e divergente se e solo se $\alpha \leq 1$. Teorema (Criterio del confronto per serie a termini positivi (s.d.)). Teorema (Criterio di Leibniz per serie a termini alterni (s.d.)). Teorema (Criterio del rapporto (s.d.)). Teorema (Criterio della radice (s.d.)). Esempi ed esercizi sulla convergenza di integrali impropri e serie numeriche.

11.01.22 Introduzione alle Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO). Motivazioni fisiche: cinematica, dinamica, oscillatore armonico, attrito cinematico. Definizioni e classificazione . EDO di primo ordine: forma normale, soluzioni, integrale generale e curve integrali. Equazioni a variabili separabili. Problema di Cauchy e dominio delle soluzioni. Cenni al Teorema (Esistenza ed unicità del problema di Cauchy per equazioni del primo ordine in forma normale con variabili separabili (s.d.)). EDO lineari di primo ordine: caso omogeneo, non omogeneo e soluzione generale. Il metodo della variazione delle costanti, per la soluzione particolare della non-omogenea. EDO lineari di secondo ordine, a coefficienti costanti: caso omogeneo, non omogeneo e soluzione generale. Indipendenza lineare di soluzioni e integrale generale. Polinomio caratteristico. Il metodo della variazione delle costanti, per la soluzione particolare della non-omogenea. Metodo *ad hoc* per la soluzione particolare della non-omogenea. Problema di Cauchy. Esempi ed esercizi vari.

13.01.22 Introduzione al calcolo differenziale per funzioni scalari di due variabili. Richiami sulla norma euclidea ed intorni nel piano $\mathbb{R}^2$. Limiti per funzioni di due variabili: definizione e teoremi standard (esistenza del limite, unicità, teorema ponte, ...). Limiti in coordinate polari e uniformità rispetto all'angolo. Continuità. Derivate direzionali e derivate parziali. Gradiente. Differenziabilità: migliore approssimazione lineare ed esistenza del piano tangente. Regolarità di funzioni di due variabili. Teorema del differenziale totale (s.d). Derivate seconde e Teorema di Schwarz. Matrice Hessiana. Estremi liberi.

18.01.22 Esercizi. Funzioni scalari di due variabili: limiti, continuità, calcolo di derivazioni direzionali, gradiente, differenziabilità. Integrali indefiniti ed integrali impropri. Studio del grafico di una funzione di una variabile. Equazioni su $\mathbb{C}$, 20.01.22 Esercizi. Serie numeriche. Integrali impropri. EDO di primo ordine a variabili separabili. EDO lineari di secondo ordine a coefficienti costanti. Calcolo degli estremi liberi di una funzione scalare di due variabili. Limiti di funzione di una variabile con approssimazione di Taylor.

Home Ciolli